Media e varianza di una variabile casuale uniforme continua

Sia X una variabile casuale uniforme continua fra a e b (con $a < b$). Il valore atteso di X è dato da

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_a^b \frac{x}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx \\ &= \frac{b^2}{2(b-a)} - \frac{a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

Il valore atteso di X^2 è dato da

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_a^b \frac{x^2}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx \\ &= \frac{b^3}{3(b-a)} - \frac{a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2+ab+b^2}{3} \end{aligned}$$

perché $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + b^2)$.
Possiamo ora calcolare, con alcuni passaggi algebrici, $Var(X)$:

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} \frac{(b-a)^2}{12}.$$